Финансијска математика

Мишић, Сара

Филиповић, Софија

Филиповић, Милена

Математички факултет

Универзитет у Београду

Београд, Србија

Јануар 2022.

Садржај

1 Историја новца и његове фунције

Новац је данас свеприсутан и тешко је замислити нормално функционисање друштва без његове свакодневне употребе. Међутим, новац није одувек постојао и мењао је свој облик небројено много пута кроз историју. Пре појаве новца, људи су трговали углавном трампом. Трампа је подразумевала размену добара између две стране, где једна страна жели ово што друга нуди и обрнуто.

Нека од најстаријих размењиваних добара је била стока, као што су краве, овце, у неким деловима света и камиле и многе друге припитомљене животиње. Уз развиће пољопривреде појавила се и употреба житарица и других биљака или биљних производа приликом трампе у многим културама.

Слика 1. трампа

Шкољке морских пужева које су биле широко доступне у водама Тихог и Индијског океана, први пут су биле коришћене при трампи у Кини. Историјски гледано, многа друштва су користила шкољке као средство размене, и оне представљају историјски најраширеније и најдуже коришћено такво средство.

Један од најранијих облика металног новчића се појавио након каменог доба у Кини као имитација шкољки морских пужева, направљен од бронзе или бакра. Овај рани метални новац развио се у примитивне верзије округлих новчића, који су прављени од простих метала.

Изван Кине, први новчићи су се развили из грудвица сребра, и имали су утиснуте

Слика 2. шкољке морских пужева

Слика 3. новчићи од простих метала

слике разних богова и царева, како би се означила њихова аутентичност. За разлику од кинеских кованица, ови нови новчићи су прављени од племенитих метала као што су сребро, бронза или злато, који су имали већу инхерентну вредност.

Први папирни новац појавио се такође у Кини, почетком деветог века и био је коришћен наредних пет векова. За ово време, производња папирних новчаница је превише порасла, толико да је њихова вредност почела брзо да пада, па је њихова употреба прекинута на неколико векова. У Европу је папирни новац стигао већ у 13. веку, али је његова шира употреба почела тек у 18. веку.

Да би се ограничила способност влада да штампају превише папирног новца, тиме га девалвирајући, многе државе су увеле тзв. Златни стандард, који је подразумевао да се јединица валуте држи на вредности фиксне количине злата. Златни стандард је уведен у Енглеској 1816. У Сједињеним Државама, Закон о златном стандарду

Слика 4. новчићи од племенитих метала

Слика 5. папирни новац

званично је усвојен 1900. године, што је помогло да се успостави Централна банка. Предност Златног стандарда је управо у томе што смањује моћ централних банака да манипулишу количином и вредношћу емитованог новца.

Први светски рат, а онда и Велика депресија 1930-их указали су на неке мане Златног стандарда: Први светски рат је показао да Златни стандард не дозвољава довољну флексибилност у количини доступног новца, зато што производња нових количина злата није уско повезана са повећањем потреба светске економије за пропорционалним количинама новца. Велика депресија, с друге стране, показала је да индивидуалне земље можда неће моћи да побегну од депресије или инфлације у остатку света. Ово је довело до ревизија, и на крају потпуног укидања Златног стандарда у скоро свим земљама света. Већина данашњих валута су **фидуцијарне**, што у преводу значи да се њихова вредност заснива на поверењу да оне могу да се замене за одговарајућу робу и услуге.

Слика 6. Златни стандард

Данас се, по неким теоријама, новцу може доделити пет основних функција:

1.**Мера вредности** – у зависности од количине његове употребне вредности, свака роба има неку своју вредности која се може изразити помоћу новца.

2.**Прометно средство**– новац се јавља у размени као посредник, јер се роба прво продаје за неку своту новца, којим се касније купује нека друга роба.

3.**Средство плаћања** – коришћење новца приликом куповине и плаћања робе који се не врше истовремено, односно омогућава одложено плаћање, као што је нпр. плаћање на кредит.

4.**Чувар вредности** – новац се од других средстава разликује по томе што не мора одмах бити искоришћен, јер задржава вредност кроз време.

Дисциплина која проучава појаве, односе и институције, методе и процесе прикупљања, расподеле и трошење новчаних средстава, као и управљање тим средствима за потребе друштва назива се **финансије**. Сам појам финансија има дугу историју и порекло речи финансије није утврђено, али вероватно је изведен из латинског језика од речи *Finantio, Finantia Percunaria*, која у преводу значи закључак или плаћање. Верује се да ова реч води корен од латинског *Finis*, што значи крај, свршетак и која је временом трансформисана у реч *Financio* која означава коначан збир новчаних плаћања.

Финансијска писменост обухвата познавање финансијских концепата, разумевање ризика, поседовање вештина за примену тих знања у циљу доношења ефикасних и безбедних финансијских одлука. Бити финансијски писмен значи бити вешт у баратању новцем и бити упознат са плаћањем рачуна, паметном инвестицијом, штедњом и многим другим аспектима финансијског живота.

Слика 7. финансије

2 Рачуни, малверзације - Терминологија

Како бисмо успешно разумели математичке основе финансијске математике неопходно је да научимо (подсетимо се) терминологију, као и да знамо који су то кључни мометни где се у свакодневном животу сусрећемо са проблемима.

Рачун је документ који издаје продавац купцу. Постоји више врста рачуна, у последње време се највише срећемо са фискалним рачунима и слиповима (потврда о плаћању картицом).

Новац је економска творевина која нам служи за размену добара и услуга.

Издвојићемо примере једног рачуна и слипа како бисмо се боље упознали са њиховом садржином, јер у борби против малверзација, превара и црне економије може нам помоћи само добро познавање садржаја рачуна (слике 1 и 2).

Слика 1. фискални рачун

Порез је недобровољно плаћање држави које није праћено противуслугом коју би од ње примио платилац пореза (више о порезу биће речено у наредним лекцијама). **ПДВ** (порез на додатну вредност) је врста пореза којим се опорезује потрошња. Можемо приметити да у делу рачуна где се налази порез имамо доста скраћеница. СЂ је вредност пореске стопе Ђ. ПЂ је износ ПДВ-а по пореској стопи Ђ. ПТ је укупан износ ПДВ-а. ЕЂ је вредност промета добра по пореској стопи Ђ. ЕТ је укупна вредност промета и услуга. Уместо Ђ могу се наћи и друге пореске стопе {А, G, Д, Ђ, Е, Ж, И, Ј, К}. Више о овим скраћеницама на линку.
ПДВ је од великог значаја за читаво друштво, у високом проценту учествује у јавним финансијама. Јавне финансије нам служе за организацију и нормалан живот заједнице, користе се за развој образовања, изградњу путева (сетити се за шта су све значајне јавне финансије)...

Слика 2. слип

Поред ова два вида плаћања рачуна често смо у ситуацији да нешто морамо да платимо уплатницом (слика 3).
При попуњавању уплатнице треба бити пажљив да не би дошло до грешке при уносу

уплатилац
Пера Перић
Перина улица број 4, Перићград
сврха уплате
Пера плаћа
све што треба да се плати
прималац
Прималац уплате
Прималачка бб, Примиград
печат и потпис уплатиоца
место и датум пријема
датум валуте
НАЛОГ ЗА УПЛАТУ
шифра плаћања
221
валута
РСД
износ
= 00.000,00
рачун примаоца
000-0000000000-00
број модела
99
позив на број (одобрење)
00000000
Образац бр. 1

Слика 3. пример уплатнице

података. Урадићемо кратку анализу уплатнице. На место уплатиоца треба унети податке о физичком лицу или фирми која врши уплату. У пољу где пише сврха уплате треба уписати шта се уплаћује, у пољу прималац треба унети податке физичког лица или фирме којој се уплаћује, поље где треба унети шифру плаћања можемо оставити да унесе службеник поште или банке или ми унети помоћу следећег линка. У поља валута и износ неопходно је унети валуту (РСД је динар) у којој плаћамо и вредност уплате. У поље рачун примаоца унесемо текући број рачуна физичког лица или фирме из поља прималац. Поље модел и позив на број нам јединствено одређују уплату нема потребе да их уписујемо ако их нисмо добили од примаоца као обавезне.
За крај дела приче о папирним економским компоненатама издвојићемо један занимљив случај малверзације. Наиме, Френк Вилијам Абагнејл амерички саветник за безбедност, имао је бурну криминалну прошлост. Он се бавио разним видовима малверзација, пошто је после пуно година бежања испред полиције коначно ухваћен одслужио је један део казне у Француској и Шведској, да би када је дошао на ред САД донета одлука да се условно пусти како би помогао у борби владе против криминала. Више о овим догађају можете прочитати у аутобиографској књизи „Ухвати ме ако можеш”.
Пошто смо се упознали са опипљивим методама плаћања рачуна, пређемо на нешто модерније методе интернет банкарства.

2.1 Интернет банкарство

Интернет или електронско банкарство дефинише скуп различитих начина извођења финансијских трансакција (размена новца) употребом информационе и телекомуникационе технологије. Електронско банкарство нам омогућава коришћење банкарских услуга 24 сата дневно. Велики проблеми банака и клијената су заштита података. Поред велике борбе банака и безбедности против обмана и крађа још увек не постоји решење за све критичне моменте у чувању новца. Против неких превара морамо се сами борити. Кључан моменат у тој борби је препознати шта је то што може да угрози наше податке и тако се изборимо против **фишинга** - крађа података о личности (енгл. fishing, phishing = phone phreaking + fishing, слика 4). Даћемо пар примера превара на које можемо налетети.

Слика 4.

У последње време се срећемо у медијима како је неко насео на превару банке. Уствари, криминалци на различите начине успевају да дођу до клијената банки и покупе вредне информације у вези банковних рачуна. На слици 5. дајемо пример једне сумњиве поруке банке.

Свака порука овог типа треба да буде проверена код службеника банке лично **пре** уласка на линк. Сваки улзак на линкове овог типа може да нас доведе у ситуацију да останемо без новца на банковном рачуну. Даћемо један приимер на слици 6. са сајта једне банке у Србији са којим ситуацијама су се сусретали. Више о томе како да се заштитите прочитати на линку.

Поштовани клијенте Зедландске банке,

Дошло је до грешке у систему Зедландске банке при чему су изгубљени Ваши подаци за пријаву на интернет банкарство. Због тога не можете приступити интернет банкарству.
Што је најважније, Ваш рачун није више сигуран.
Молимо Вас да кликнете на доњу везу и следите упутства како бисте омогућили поновни приступ. Биће потребно да упишете своје податке за интернет банкарство.

http://zedlandskabanka.com

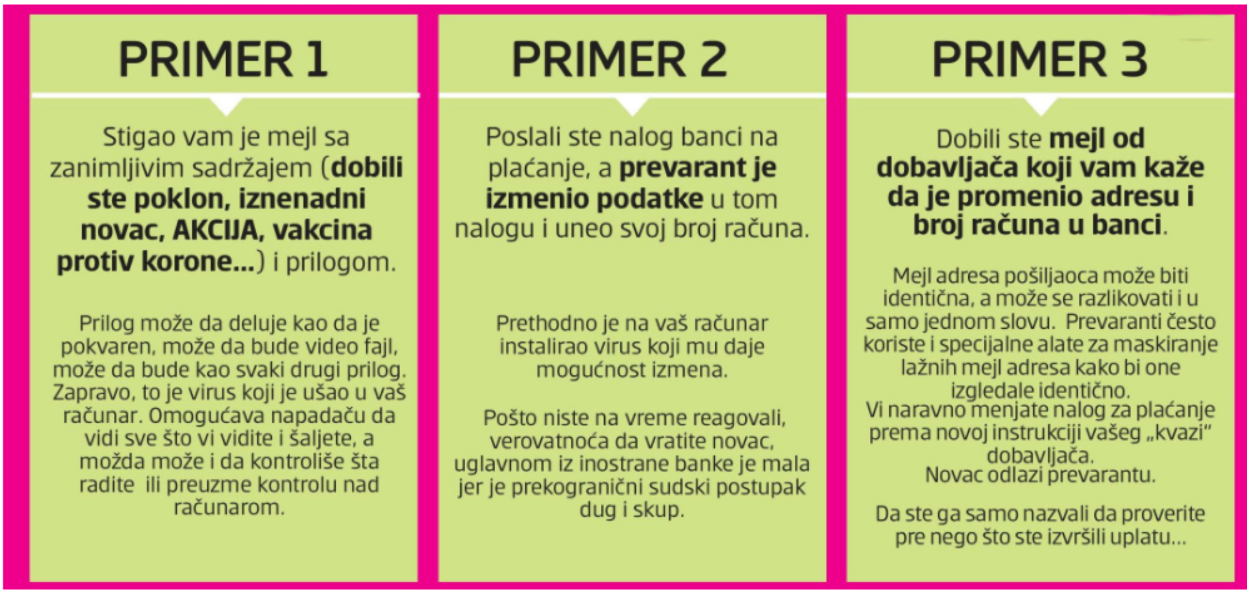
ЗЕДЛАНДСКА БАНКА

Слика 5. сумњива порука банке

Даље ћемо размотрити **„Нигеријску превару”**. „Нигеријска превара” подразумева обмањивање лаковерних грађана да ће лако доћи до зараде ако само уплате новац на неки рачун. Преваранти који примењују овај тип преваре држе се устаљеног шаблона: шаљу мејл или поруку преко друштвених мрежа из иностранства примаљујућег садржаја. Већином се овакве поруке шаљу на гомилу адреса. Овакав тип криминала се теже открива јер криминалци обично користе јавне интернет мреже како би прикрили траг. Занимљиво је да је један од превараната кад су га питали колико кошта обмана овог типа рекао 2е и то 1е за приступ интернету у кафићи и 1е за кафу.

Савети за крај:

1) Не носите за собом велике количине новца, чувајте га на различитим местима;
2) ПИН картице треба да знате само Ви;
3) Не верујете у лаку зараду;
4) Наоружајте се знањем, јер је **знање једина моћ** у борби против криминала.



Слика 6. пример фишинга

3 Проценат, процентни рачун

Проценат је универзална јединица мере и представља стоти део неке величине.Дакле, ако желимо да изрчунамо један проценат неке величине a то ће бити $\frac{a}{100}$. Проценат означавамо са $\%$.

Ако нам је потребно да Xодредимо као прооценат броја Y то радимо:

$$X : Y \cdot 100 = \frac{X}{Y} \cdot 100$$

Ради лакшег разумевања даћемо један пример.

Пример 1: Нека је на журку позвано 20 људи. Који проценат људи је дошао ако знамо да је дошло:

а) 10 људи;

б) 0 људи;

в) 15 људи;

г) 20 људи.

Решење: За део а) знамо да је 10 људи тачно пола од 20 што значи 50%; у делу под б) видимо да нико није дошао па је то 0%; у делу под в) можемо одредити тако што поделимо 15 са 20 и тако добијемо децимални број па је тражени проценат тај број помножен са 100; у делу под г) аналогно добијамо да је резулетат 100%.

Сада ћемо прећи на неке практичне примене процента.
Често постоји потреба да рачунамо колико нека роба кошта после неког поскупљења / снижења. Размотрићемо пар пимера ради лакшег схватања.

Пример 2: Нека књига пре поскупљења кошта 700 динара. Колико је цена књиге након поскупљења од 17%.

Решење: Да бисмо добили нову цену потребно је да на стару додамо одређени проценат старе цене $700 + \frac{17}{100} \cdot 700 = 819$. Нова цена књиге је 819 динара.

Пример 3: Јована хоће да купи перницу на снижењу која је коштала 700 динара. По којој цена Јована може да купи перницу након снижења од 17%.

Решење: Да бисмо добили нову цену потребно је да од старе одузмемо одређени проценат старе цене $700 - \frac{17}{100} \cdot 700 = 581$. Јована може да купи перницу по цени од 819 динара.

Размотрићемо цену робе пре и после поскупљења. Ако знамо стару цену неког производа S и ако знамо нову N можемо да израчунамо проценат поскупљења P на следећи начин:

$$\%P = \frac{N - S}{S} \cdot 100$$

Додатно ћемо објаснити зашто овако рачунамо: $N - S$ узимамо као да бисмо одредили

као разлику нове цене од старе, ово ће бити позитиван број јер смо нагласили да се ради о поскупљењу, у случају смањења цене уместо $N - S$ узели бисмо $S - N$. Добијену разлику делимо са старом вредности, јер желимо колики је проценат старе вредности износи тренутно поскупљење. На крају овај број множимо са 100 да бисмо добили проценат.
Урадићемо још два примера.

Пример 4: Нека књига пре поскупљења кошта 900 динара. Колико поцената је поскупела књига ако знамо да јој је сада цена 1080 динара.
Решење: Разлика између нове и старе цене је 180 динара. Тражени проценат ћемо израчунати као $\frac{180}{900} \cdot 100 = 20\%$. Књига је поскупела 20%.

Пример 5: Милица је купила хаљину на снижењу за 4500 динара. Пре снижења хаљина је коштала 5000 динара. Израчунати проценат снижења.
Решење: Разлика између старе и нове цене је 500 динара. Тражени проценат ћемо израчунати као $\frac{500}{5000} \cdot 100 = 10\%$. Проценат снижења је 10%.

Помоћу процената можемо вршити и поређења две величине, јер све претварамо у исти почетну величину. Погледаћемо један пример како бисмо лакше разумели поређење помоћу процената.

Пример 6: Александра жели да упореди зараду од продаје јабука у два месеца. Александра зна да је у јуну платила килограм јабука за 70 динара, а продала га за 100 динара, док је у јулу за килограм јабука дала 50 динара, а продала за 70 динара. У ком месецу је александра остварила већи приход по килограму јабука?
Решење: За јун добијамо да је проценат зараде $\frac{30}{70} \cdot 100 \approx 42,86\%$, док је у јулу $\frac{20}{50} \cdot 100 = 40\%$. Како је 40 мање од 42,86 следи да је Александра имала већу зараду у јуну.

Пример 7: Маријана сакпља новац за путовање. За сада је скупила 5500 динара, 130 евра и 150 долара. Маријана зна да јој за путовање треба 42000 динара. Израчунати колики проценат сакупљеног новца чине еври, а затим израчунати колики проценат цене путовања је Маријана скупила (курс: 1 евро = 118 динара, 1 долар = 104 динара).

Решење: Прво ћемо претворити евре и доларе у динаре, 130 евра је $130 \cdot 118 = 15340$ динара, 150 долара је $150 \cdot 104 = 15600$ динара. Дакле, Маријана је укупно сакупила 36440. Сад ћемо израчунати колико процената сакупљеног чине еври:
$\frac{15340}{36440} \cdot 100 \approx 42,1\%$. На сличан начин добијамо да је Маријана сакупила
$\frac{36440}{42000} \cdot 100 \approx 86,76\%$ суме новца потребног за путовање.

Ради лакшег рачунања процената треба приметити да је исто а% од х и х% од а. Ако је нпр. потребно да израчунамо 18% од 50 то није тако лако јер 18% није неки довољно „леп” разломак (не рачунамо га тако лако). Међутим, примемтићемо да у рачунању процента једино што нам се стално мења су чиниоци у производу изнад разломачке црте, а знамо да је производ комутативан (чиниоци могу да мењају места). Како у нашем примеру имамо $\frac{18\cdot 50}{100} = \frac{50\cdot 18}{100}$ па ће нам на основу ове једнакости 18% од 50 бити исто што и 50% од 18, а то пуно лакше рачунамо јер је $50\% = \frac{1}{2}\cdot$, па је резултат половина од 18, а то је 9.

Размотрићемо још једно схватање процента. Проценат можемо посматрати као 1 **над** 100. Овиме доводимо у везу проценте и пропорцију, што је до сад било скривено у рачуну, али кад боље размислимо рекли смо да су проценти ту да бисмо могли да поредимо разне величине, а то нам омогућава и пропорција. Израчунајмо 8% од 125. Речима 8% је 8 над 100, тржимо да се односи као неки број над 125. Дакле,

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{125};$$

$$8 \cdot 125 = x \cdot 100.$$

Из овога добијамо $= \frac{8\cdot 125}{100}$, из чега рачунањем добијемо да је x=10.

Промил је универзална јединица мере и представља хиљадити део неке величине. Обележавамо га са ‰.
Урадићемо један пример како бисмо видели како се користе промили.

Пример 8: Провизија је унапред дефинисана накнада посредника којом се плаћа нека услуга. Нека је провизија неке банке 5‰. Колико износи провизија на 500 динара?
Решење: Израчунаћемо $\frac{500\cdot 5}{1000}$. Дакле, провизија је 2,5 динара.

3.1 Порез и проценат

У некој од претходних лекција дефинисали смо шта је порез у општем смислу. Обавеза плаћања пореза је регулисана законом. У математичком смислу порез је део (проценат) укупне вредности робе (услуге, плате, имовине, акцизе, добити и тако даље). Порез рачунамо као одређени проценат вредности производа.

Даћемо један пример како бисмо боље објаснили шта је порез. Купац купује у продавници намирнице. У цену намирница поред основице урачунат је одређени проценат који се назива ПДВ (врста пореза). Основица је сума вредности зараде произвођача, препродавца (не мора да постоји) и продавца (тргвинског ланца) производа. Ако у ланцу трговине робе постоји више посредника сваки од њих је дужан да плати одређену вредност пореза. Тако долази до гомилања пореза. Ово је једно од објашњења зашто су неки трговински ланци скупљи од других.

У Србији ПДВ на већину робе је 20%. То значи да на неки производ који кошта 100 динара без ПДВ-а треба додати 20 динара за порез, па је продајна цена производа 120 динара. Погледаћемо још неке примере.

Пример 9: Нека је цена робе у вердности од 800 динара снижена два пута за исту камтну стопу. Нека је нова цена 512 динара. Израчунати каматну стопу за коју је снижена цена робе.
Решење: Нека је p тражена вредност. Приметимо да важи:

$$800 - \frac{p}{100} \cdot 800 = 800 \cdot (1 - \frac{p}{100})$$

$$800 \cdot (1 - \frac{p}{100}) - \frac{p}{100} \cdot 800 \cdot (1 - \frac{p}{100}) = 512$$

$$800 \cdot (1 - \frac{p}{100}) \cdot (1 - \frac{p}{100}) = 512$$

$$800 \cdot (1 - \frac{p}{100})^2 = 512$$

Решавањем квадратне једначине добијамо да је $p = 20$, па је процентна стопа једнака 20%.

Бруто цена подразумева цену основног производа плус цену свих трошкова која иду на основну цену (ПДВ, транспорт, осигурање, банкарски трошкови, царина и сл).
Нето приход подразумева само цену основног производа, без додатних трошкова (ПДВ, транспорт, осигурање, банкарски трошкови, царина и сл).

Пример 10: Предузеће је уплатило свом добављачу 450000 динара бруто вредности (заједно са ПДВ-ом). Стопа ПДВ-а је 20%. Израчунати нето износ.
Решење: Нека је B бруто, N нето вредност и нека је p ПДВ у процентима. Приметимо да важи: $B = N + p \cdot N$, па је: $N = \frac{B}{(1+p)}$. Из овога добијамо:

$$N = \frac{100 \cdot 450000}{120} = 375000.$$

Нето вредност је 375000.

За крај приче о процентима и порезу скренућемо пажњу на то да ако цену нечега повећамо за одређен проценат и после смањимо за исти цена производа није иста као цена пре промена.
На пример, нека је цена неког производа пре поскупљења 100 динара и нека је проценат поскупљења 5%. Цена производа после поскипљења је 105 динара. Нека сад производ појефтини за 5%, сад нам треба 95% од 105 динара, што је 99,75 динара. Видимо да је $99{,}75 < 100$, што нам даје да се узастопне операције процената разликују од сумираних.
Сад ћемо расписати овај пример да би било јасније шта се десило:

$$(100 + 5\% \cdot 100) - 5\% \cdot (100 + 5\% \cdot 100) = (105\% \cdot 100) - 5\% \cdot (105\% \cdot 100) = 95\% \cdot (105\% \cdot 100)$$
$$= \frac{95 \cdot 105}{100 \cdot 100} \cdot 100 = 99,75\% \cdot 100.$$

Дакле, општи случај за поскупљење од $p\%$ па затим појефтињење за $p\%$ добијемо да се нова цена (N) од старе (S) цене може одредити на основу формуле:

$$N = \frac{(100 + p) \cdot (100 - p)}{100 \cdot 100} \cdot S.$$

Слично се може урадити за случај да производ прво појефтини па поскупи.

4 Увод каматни рачун

Вероватно сте се некада пре сусретали са појмовима попут каматног рачуна, каматне стопе, кредита... Познавање ових појмова је фундаментално када је у питању финансијска писменост, јер ћете макар једном у животу сигурно имати посла са макар од једним од њих. Такође, од важности је знати и неке математичке основе које стоје иза њих, како би нам били што јаснији и приближнији. Надамо се да ћете након овог поглавља стећи знања која ће вам користити како и у школи, тако и у животу.

4.1 Каматни рачун

Позабавимо се прво конкретним примером: Хоћемо да купимо стан. Међутим, станови су јако скупи и ретко ко има новца да одмах плати све. Због тога, неопходно је да позајмимо од некога те паре. Пошто није ни паметно ни легално позајмити толику количину новца од неког пријатеља, људи позајмљују новац од банке. Рецимо да стан који желимо да купимо кошта 50 000. Нама ће банка, уколико сматра да смо добри кандидати за то, позајмити те паре. Али шта банка има од тога да нам позајми паре? Ми, када позајмимо новац од банке, потписујемо одређени уговор (уговор о зајму провери јел се зове тако). Тим уговором смо се обавезали да ћемо вратити новац који нам је банка позајмила, и мало више од тога.
Да генерализујемо причу, каматни рачун је рачун који одређује односи који се успостављају између дужника и повериоца. Дужник позајмљује одређени новац од повериоца на одређено време и плаћа одређену новчану надокнаду повериоцу, као и накнаду за коришћење позајмљеног новца. Сума коју дужник позајмљује од повериоца назива се капирал или главница. Поред главнице, дужник повериоцу исплаћује и камату. Камата је трошак позајмњивања новца и компензација повериоца за одрицање од сопствене потрошње и ризике које преузима када поверава свој новац другима. Камата се обично изражава као годишња каматна стопа: износ камате која ће бити

исплаћена током једне године подељен је износом позајмљеног новца. Камата се може изражавати процентима или децималним бројем.

4.2 Камата из угла математике

Посматрајмо неки известан објекат А који има цену, и претпоставимо да смо га купили по некој цени X_0, данас. Ако је X_t = X(t), где је t > 0, цена (вредност) објекта А у тренутку t нека позитивнвна вредност, тада добит, однсно губитак који смо остварили можемо израчунати као $X_t - X_0$. У односу на почетно улагање, тј. у односу на цену X_0, стопа добити (губитка) износи $R_t = R(0,t) = \frac{X_t - X_0}{X_0}$, тј. ако из овога изразимо X_t добијамо:
$X_t = (1 + R_t)X_0$.
Нека је $r = R_1 = R(0,t)$ стопа "раста"на основу које одређени износ новца X_0 данас "порасте"на износ X_1 за једну годину, тј. $r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$
Уочимо следеће:
X_1 - вредност капитала на крају прве године
$X_1 = (1 + r)X_0 = X_0 + rX_0$. Први сабирак у овој једначини представља главницу, а други сабирак (rX_0) представља камату (добит повериоца у односу на почетно улагање).
Применимо сада поступак у коме ћемо сваке године укамаћивати само главницу. То ће изгледати овако:
$X_2 = (1 + 2r)X_0 = X_0 + 2rX_0$ - вредност добра на крају друге године.
...
$X_n = (1 + nr)X_0$, где је са n означен број година, а са r годишња каматна стопа.
Овакав принцип укамаћивања називамо простим.
Међутим, да смо и интерес(камату) оставили да се укамаћује, добили бисмо:
$X_1 = X_0 + rX_0 = (1 + r)X_0$
$X_2 = (1 + r)X_0 + r(1 + r)X_0 = (1 + r)^2X_0$
...
$X_n = (1 + r)^nX_0$

Овај метод укамаћивања називамо сложеним.

4.3 Задаци за прост каматни рачун

1. На који износ ће се увећати 800 евра уз 9% простог интереса за 4 месеца?

Решење:

Код простог укамаћивања укамаћујемо само главницу. Период од 4 месеца је заправо $\frac{4}{12}$ године, па задатак можемо урадити овако:

$X_n = (1 + nr)X_0$

$X_{\frac{4}{12}} = (1 + \frac{4}{12}0{,}09)800 = (1 + 0{,}03)800 = 1{,}03 \cdot 800 = 824$

Одговор: Износ ће се увећати са 800евра на 824.

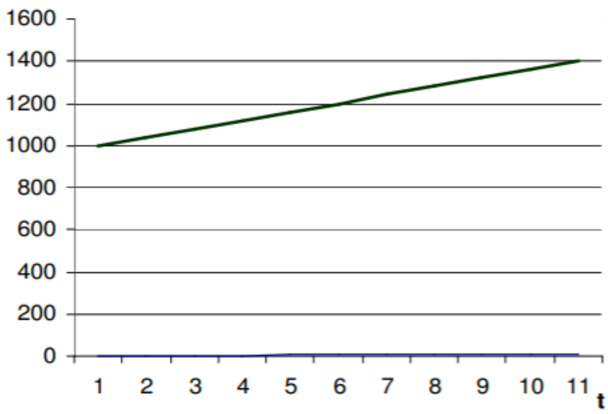
2. На који износ ће се увећати 1000 евра уз 4% простог интереса за 10 година?

Решење:

$X_n = (1 + nr)X_0$

$X_{10} = (1 + 10 \cdot 0{,}04)1000 = (1 + 0{,}4)1000 = 1{,}4 \cdot 1000 = 1400$

На графику испод нацртано како расте профит сваке године.



3. Главница неког производа је 9893,78 евра. Ако знамо да је за пола године цена овог производа нарасла на 10000 евра, колика је годишња каматна стопа?

Решење:
Из наше формуле, тражи се годишња каматна стопа (у ознаци r). Извуцимо је из наше фомруле:
$X_n = (1+nr)X_0$
$X_n = X_0 + nrX_0$
X_n - $X_0 = nrX_0$
r = $\frac{X_n - X_0}{nX_0}$
r = $\frac{106.22}{0.5 \cdot 9893.78}$
r = $\frac{106.22}{4946.89} = 0.02147$
r =2,147%

4. Фирма треба да плати за машину 1.000.000 € за 5 година и још 500.000 € за 10 година од данас. Фирма жели да брже регулише обавезу, да уплати 600.000 € за 3 године, а остатак дуга да плати за 7 година од данас. Који износ треба да буде плаћен за 7 година, ако је каматна стопа 8%.

Решење:
Из формуле за просту каматну стопу $X_n = (1+nr)X_0$ можемо израчунати главницу. Ако знамо колику ће вредност имати главница у датом временском периоду, формулу можемо изразити на следећи начин:
$X_0 = \frac{X_n}{1+nr}$

Хајде прво да израчунамо почетну цену овог производа. То ћемо добити тако што ћемо израчунати почетну вредност оба дуга. Поделимо проблем сада на два дела:

I) Почетна цена дуга од 1 000 000 евра који мора да се врати за пет година, са каматном стопом од 8% је :
$X_{01} = \frac{1000000}{1+0.08 \times 5} = 714285$

II) Почетна цена дуга од 500 000 евра који мора да се врати за десет година, са каматном стопом од 8% је :
$X_{02} = \frac{1000000}{1+0.08 \times 5} = 277778$

Када саберемо, почетна вредност капитала је била $X_0 = X_{01} + X_{02} = 992\ 064$ евра
Ми смо сада израчунали укупну главницу. Занима нас прво, колика је главница капитала који ће за 3 године да вреди 600 000 евра са каматном стопом од 8%.

Затим, када тај новац одузмемо од укупне главнице, та вредност је почетна вредност другог дела дуга који морамо да вратимо за 7 година са каматном стопом од 8% (подаци из задатка). Када то израчунамо, решили смо задатак.

$X_{03} = \frac{600000}{1+0.08\times3} = 483871$
$X_{04} = X_0 + X_{03} = 508193$

Сада, вредност почетног капитала X_{04} за седам година са каматном стопом од 8% је :
$X_n = (1 + nr)X_0$
$X_7 = (1 + 7 \times 0.08)508193$
$X_7 = 792\ 781.08$

5 Затезна камата

Затезна камата представља потраживање повериоца због тога што дужник није благовремено испунио своју новчану обавезу.
Закон о затезној камати прописује начин обрачуна затезне камате. Затезна камата у смислу овог закона обрачунава календарски број дана периода касније у измиривању обавеза у односу на календарски број дана у години применом простог каматног рачуна.
Дакле, дан доспећа дуга се не узима у обзир, већ се затезна камата обрачунава за број дана почев од првог дана кашњења, закључно са првим даном враћања дуга.

5.1 Обрачун затезне камате према одлуци уставног суда по старом закону

За обрачунавање законске затезне камате се примењује следећа формула:
$K = 100 \times [(1 + \frac{K_p}{100}) \times (1 + \frac{0.5}{100}) - 1]$
где је:
K - стопа затезне камате
K_p - стопа раста потрошачких цена у РС (по индексу потрошачких цена)
0.5 - фиксна стопа раста

Задатак 1: Израчунати износ затезне камате на дуговање од 10 000 динара за период кашњења од 10 дана, ако је месечна стопа раста потрошачких цена тада била 0.9% (у новембру 2011).
Решење:
Ако убацимо све податке из задатка у формулу горе, добијамо месечну стопу затезне камате:
$K = 100\dot{[}(1 + \frac{0.9}{100}) \times (1 + \frac{0.5}{100}) - 1] = 1.4045\%$

Дневна стопа затезне камате у периоду кад је стопа потрошачких цена била 0.9%:
$\frac{1.4045\%}{30} = 0,0468167\%$
Стопа затезне камате 10 дана касније: $100 \times 0,0468167\% = 0,468167\%$

5.2 Обрачун затезне камате по новом закону

- Према закону о затезној камати, затезна камата се обрачунава према следећој формули:

$$I_z = \frac{G \times p \times d}{(100 \times G_d)}$$

  где су:
  k – износ затезне камате
  G – износ дуга
  p – прописана годишња стопа затезне камате
  d – календарски број кашњења у обрачунском периоду
  G_d – календарски број дана у години (365,366)

- У складу са претходно уведеном нотацијом, затезна камата I_z може бити израчуната применом обрасца:
  $I_z = K \times i \times t$ где је

- На износ дуга који гласи **у динарима**, стопа затезне камате се према Новом закону утврђује на годишњем нивоу као: РЕФЕРЕНТНА КАМАТНА СТОПА НБС[1] + 8 процентних поена

- За износ дуга који гласи **у еврима**, за стопу затезне камате узимамо референтну каматну стопу Европске централне банке на главне операције за рефинансирање, увећану за 8 процентних поена. (исто се рачуна као изнад, само се узима друга референтна каматна стопа).

[1]НБС - Народна банка Србије

Напомена: за износ дуга који се односи на другу страну валуту, узима се референтна/основна каматна стопа коју је прописала/користи централна банка земље домаће валуте, такође увећана за 8 процентних поена.

REFERENTNA KAMATNA STOPA	UVEĆANJE REFERENTNE KAMATNE STOPE	STOPA ZATEZNE KAMATE	PERIOD VAŽENJA
ZA IZNOSE U DINARIMA			**...**
4,50%	8,00 procentnih poena	**12,50%**	**15.10.2016.-11.02.2016.**
4,25%	8,00 procentnih poena	**12,25%**	**12.02.2016.-07.07.2016.**
4,00%	8,00 procentnih poena	**12,00%**	**počev od 08.07.2016.**
ZA IZNOSE U EVRIMA			
0,00%	8,00 procentnih poena	**8,00%**	**počev od 16.03.2016.**

Izvor: Narodna banka Srbije (www.nbs.rs)

Пример 1: Дужник није вратио свој дуг од 20 000 динара о року доспећа, тј. 04.09.2016. године, већ 16.09.2016. године. Израчунати затезну камату као и укупан износ који је дужник платио.

Решење:

Из текста задатка видимо да је G = 20 000, број дана који се касни је 12 (из задатка), па је d = 12. Из таблице горе, видимо да је стопа затезне камате 12%, па p=12,00%. Када ове податке убацимо у формулу обрачунавања затезне камате, добијамо:

$I_z = \frac{20000 \times 12.00 \times 12}{(100 \times 365)}$ $I_z = 47.34$ динара

G + Iz = 20000+47.34=20047.34 dinara

Пример 2: Дужник није платио свој дуг од 5 000 евра 28.05.2016. године, већ 28.06.2016. године. Израчунати затезну камату.

Решење:

G =5 000, број дана који се касни је 31 (из задатка), па је d = 31. Из таблице горе, видимо да је стопа затезне камате 8% (валута у којој се обрачунава дуг су еври), па је p=8,00%:

$I_z = \frac{5000 \times 8.00 \times 31}{(100 \times 365)}$

$I_z = 33.97$ динара.

5.3 Основне примене финансијске математике на тржишту новца

- Полазиште разматрања примене финансијскоматематичких метода на тржишту новца представља објашњење **стопе приноса** и **дисконтне стопе**, као и њиховог међусобног односа.

- **Стопа приноса** и **дисконтна стопа** доводе у везу две исте величине: **почетну и крајњу вредност капитала**. Разлика међу њима огледа се у бази у односу на коју се конкретна стопа примењује.

- Стопа приноса:
  Стопа приноса **it** дефинише се као прираст капитала(тј. интерес) у односу на почетну вредност капитала:
  it $= \frac{K_t - K}{K}$

- Дисконтна стопа:
  Дисконтна стопа **dt** дефинише се као прираст капитала кроз почетну вредност капитала. Дисконтна стопа или есконтна стопа је каматна стопа по којој централна банка одобрава кредите пословним банкама и коју централна банка обрачунава при откупу меница.
  dt $= \frac{K_t - K}{K_t}$

IZRAŽAVANJE DISKONTNE STOPE PREKO STOPE PRINOSA:

$$\frac{K_t}{1+it} = K_t(1-dt)$$

$$\frac{1}{1+it} = 1-dt$$

$$dt = 1 - \frac{1}{1+it} = \frac{it}{1+it}$$

$$d = \frac{i}{1+it}$$

IZRAŽAVANJE STOPE PRINOSA PREKO DISKONTNE STOPE:

$$\frac{K_t}{1+it} = K_t(1-dt)$$

$$\frac{1}{1+it} = 1-dt$$

$$it = \frac{1}{1-dt} - 1 = \frac{dt}{1-dt}$$

$$i = \frac{d}{1-dt}$$

- Уколико је износ од **K** новчаних јединица уложен за временски период **t** уз прост интерес по стопи приноса **i**, његова крајња вредност ће износити:
  $K_t = K(1 + i \times t)$
  Израз $1 + i \times t$ представља **фактор акумулације** или фактор раста простог интересног рачуна
  Ако имамо K_t (увећану вредност капитала за прост интерес), и дата нам је дисконтна стопа d, почетну вредност капитала утврђујемо на следећи начин:
  K $= K_t(1 - d \times t)$
  Израз $(1 - d \times t)$ представља **дисконтни фактор** код простог интересног рачуна.

Пример 1: Банка даје кредит од 5000 евра на 3 године са дисконтном стопом 5% годишње. Одредити који ће износ добити клијент у моменту добијања кредита.
Решење: $K = 5000 \times (1 - 0.05 \times 3) = 5000 \times 0.85 = 4250$.

Пример 2: Предузеће узима кредит од банке у износу од 10 000 евра на 3 месеца. Колико треба да врати за 3 месеца ако узме кредит са 8% дисконта?
Решење: Три месеца представља четвртину године.
K $= K_t(1 - d \times t)$
K $= K_{0.25}(1 - 0.8 \times 0.25)$

$K_{0.25} = 10204.08$

Пример 3: Неки капитал је био уложен на 9 месеци, уз стопу приноса 10% и нарастао на износ од 5000 евра. Одредити тај капитал.

Решење:

$K = \frac{K_t}{1+it}$

$K = \frac{5000}{1+0.1\times\frac{9}{12}} = 4651.16$

Пример 4: Годишња дисконтна стопа је d = 5.66%. Одредити стопу приноса?

Решење:

$i = \frac{d}{1-dt} = \frac{0.0566}{1-0.0566\times 1} = 0,05999 \approx 6\%$

TABLICE ZA STOPU PRINOSA I ZA DISKONTNU STOPU

STOPA/RAČUNANJE	direktno	obrnuto
Stopa prinosa i	akumulacija $K_t = K(1+it)$	diskontovanje $K = \frac{K_t}{1+it}$
Diskontna stopa d	diskontovanje $K = K_t(1-dt)$	akumulacija $K_t = \frac{K}{1-dt}$

STOPA/FAKTOR	diskontni faktor	faktor akumulacije
Stopa prinosa i	$\frac{1}{1+it}$	$1+it$
Diskontna stopa d	$1-dt$	$\frac{1}{1-dt}$

Пример 5: За стопу приноса од 20% и дисконтну стопу од 20% одредити дисконтни фактор и фактор акумулације за месец, тромесечје, пола године и годину.
Решење:

stopa	diskontni faktor	$t=\frac{1}{12}$	$t=\frac{1}{4}$	$t=\frac{1}{2}$	$t=1$
i	$\frac{1}{1+it}$	0,9836	0,9524	0,9091	0,8333
d	$1-dt$	0,9833	0,95	0,9	0,8

stopa	faktor akumulacije	$t=\frac{1}{12}$	$t=\frac{1}{4}$	$t=\frac{1}{2}$	$t=1$
i	$1+it$	1,0166	1,05	1,1	1,2
d	$\frac{1}{1-dt}$	1,0169	1,0526	1,1111	1,25

5.4 Израчунавање цена и приноса краткорочних хартија од вредности

- Цена коју је инвеститор спреман да плати за било који финансијски инструмент представља садашњу вредност очекиваног будућег нето новчаног тока по основу поседовања датог инструмента.
- Вредновање финансијских инструмената тржишта новца се, с обзиром на њихову краткорочну природу, најчешће врши помоћу простог интересног(каматног) рачуна.
- Краткорочне хартије од вредности су дуговни финансијски инструменти који

својим емитентима (особе које издају хартије од вредности - дужници) пружају могућност брзог и јефтиног доласка до потребних новчаних средстава. Према начину формирања цене и израчунавања приноса, краткорочне хартије од вредности могу бити:

- Дисконтне
  - Краткорочне државне обвезнице
  - Комерцијални записи
  - Банкарски акцепти
- Каматоносне
  - Депозитни сертификати
  - Краткорочне обвазнице државних агенција

6 Сложени каматни рачун

- Основни елементи финансијских модела су време и новац.
- Временска вредост новца је основа финансијске математике: Иста сума новца у различити временским тренуцима има различиту вредност.
- Формула сложеног каматног рачуна
  $K_n = K(1+\frac{p}{100})^n$, тј. ако запишемо мало другачије:
  $K_n = KI_{p\%}{}^n$, где је:
  p - декурзивна каматна стопа
  r $= 1+\frac{p}{100}$ је декурзивни каматни чинилац
  $I_{p\%}{}^n$ - вредност фактора акумулације r^n
  Каматна стопа која се рачуна након n година која се капиталише m пута годишње:
  $K_{mn} = K(1+\frac{p}{100\times m})^n = K_0 \times I_{\frac{p}{m}}{}^{mn}$

Пример 1: Особа уложи 100 евра у банку која плаћа 6% годишње. Који ће износ камата штедиша остварити након 4-те године (рачунати сложеним каматним рачуном)?

Решење:

$100 \times 1.06 = 106$

$106 \times 1.06 = 112.36100 \times 1.06^2 = 112.36$

$100 \times 1,06^3 = 100 \times 1.19101 = 119.10$

$100 \times 1,06^4 = 100 \times 1.2624 = 126.24$

Пример 2: Колика је увећана вредност 300 евра уложених уз 5% годишње (рачунати сложеним каматним рачуном):

а) након 6 година

б) након 12 година?

Решење:

а)$300 \times (1+0.05)^6 = 402.03$

б) $300 \times (1+0.05)^{12} = 538.75$

Пример 3: Уколико данас уложимо 10 000 динара у банку која рачуна интерес по стопи 5% (сложеним каматним рачуном), колико ћемо имати на рачуну на крају пете године, ако је капиталисање:

а) годишње

б) тромесечно

Решење:

а) $K_5 = 10000(1+\frac{5}{100})^5$

$K_5 = 10000 \times 1.276282 = 12762.82$

б) $K_{4\times5} = 10000(1+\frac{5/4}{100})^{4\times5}$

$K_{20} = 10000 \times 1.282037 = 12820,37$

7 Доношење инвестиционих одлука

Појам **инвестиција** се дефинише на различите начине, али у сваком случају подразумева улагања финансијских средстава у циљу остваривања економских, неекономских или и једних и других циљева и ефеката у будућности. Ефекти инвестиције могу бити директни или индиректни, али са становиштва оцене ефикасности, исказују се у новчаном облику будућих прихода. Периоди инвестиционог улагања и коришћења инвестиције могу бити једнаки или различите дужине. Са економског становишта пожељно је да период инвестиционог улагања буде кратак, а економски век ефеката инвестиције што дужи. За неку инвестицију кажемо да је исплатива односно рентабилна ако је садашња вредност инвестиционог улагања мања од садашње вредности прихода од инвестиције. Инвестиционе одлуке се доносе на основу вредновања ефеката инвестиционих улагања и плана реализације инвестиција. Планови реализације инвестиција су веома сложени планови, који садрже доста различитих анализа, као што су анализа локације, анализа тржишта набавке инвестиционе опреме, анализа финансијске конструкције, анализа тржишта инпута, анализа тржишта аутпута, анализа нето девизних ефеката, анализа утицаја инвестиције на друштвени развој, итд.

7.1 Ризик избора

Често смо у ситуацији да морамо да донесемо неку одлуку без увида у све последице и несигурности које она може донети са собом. На савременим финансијским тржиштима финансијске институције су изложене бројним ризицима, као што су кредитни ризик, тржишни ризик, ризик каматних стопа, валутни ризик, итд. Прецизна дефиниција ризика не постоји, али оно што је заједничко свим покушајима дефинисања ризика јесу неизвесност и губитак. Једна од дефиниција ризика јесте да он представља неизвесност будућег исхода. Ризици могу бити различити, а једна од ширих подела је на пословне и непословне ризике.

Циљ је наћи функцију која ће моћи да предвиди тржиште, која ће узети у обзир што више фактора који утичу на тржиште. Предикцијом (предвиђањем) тржишта се бави грана математике која се зове статистика, али данас све више има утицаја развој модерних технологија, па се један део вештачке интелигенције бави само предвиђањем тржишта. Све је више програмерских фирми које имају тимове који се баве само предвиђањима тржишта и развојем вештанчке интелигенције засновсне на машинском учењу. Производе засноване на машинском учењу продају широм света клијентима. Да бисмо дошли до информација неопходно је знати прочитати податке и обрадити их да би се на крају добиле корисне информације које могу да се користе у машинском учењу. На даље ћемо се бавити само читањем и тумачењем података које имамо као познате.

7.2 Дигиталне валуте, читање и тумачење података

Како бисмо боље објаснили како се читају и тумаче подаци обаснићемо ово на актуелним виртуелним валутама (оно што доживљавамо као криптовалуту, иако се у Закону о дигиталној имовини тај израз не користи). Занимљиво је да је Закон о дигиталној имовини ступио на снагу 29. јуна 2021. године. Код нас је Народна банка Србије надлежна је за одлучивање у управним поступцима, доношење подзаконских аката, надзор над обављањем послова и остваривање других права и обавеза надзорног органа у делу који се односи на виртуелне валуте као врсту дигиталне имовине. Све више држава у свету разматра правне акте за коришћење дигиталних валута, прва државе која је вела неку дигиталну валуту као званичну је Ел Салвадор (Bitcoin). Један од већих проблема рударења дигиталних валута је потрошња енергије.

Све дигиталне валуте користе исту технологију - блокчејн. Блокчејн се користи за трансакције и осигурава да се сваки пренос догоди само једном. Блокчејн служи као база података где сваки блок трајно чува информације о једној трансакцији, јер једном унесени подаци се не могу мењати. Овако настаје низ блокова трансакција који се зове блокчејн.

Најпопуларније дигиталне валуте су: *Bitcoin, Ether, Litecoin, Cardano, Polkadot, Bitcoin Cash, Stellar, Dogecoin, Binance Coin, Tether, Monero*. Србија има своју дигиталну валуту (Лазар).

Следеће што ћемо размотрити је кретање неких дигиталних валута на тржишту. Радићемо са приближним вредностима како бисмо поједноставили рад, иначе за стварне потребе у предвиђању битно је радити са прецизним подацима. Објаснићемо кроз пар задатака како се чита крива (функција, графикон) промене вредности неке дигиталне валуте. Посматраћемо вредност валуте у РСД.

Пример 1: Познат нам је график расподеле вредности Bitcoin-а у РСД у 2021. години.

а) Са слике се може видети податак да Bitcoin за годину дана бележи раст од приближно 109%, са графика се може прочитати и да је вредност почетком јануара била око 2535000. Проверити приближно тачност вредности Bitcoin-а крајем децембра.

Решење: Нађемо приближну вредност у децембру тако што на вредност у јануару додамо још 109% вредности у јануару. Па је тражени резултат
$2535000 + 109\% \cdot 2535000 = 5298000$, што је приближно тражена вредност 5292000 (битан нам је ред величине, овај пример демонстрира колико мала промена у децималама може да утиче на резултат).

б) Ако смо уложили почетком јануара онолико новца колико нам је требало за 1 Bitcoin, колико смо новца зарадили (у РСД) у децембру (ако нисмо више реаговали на тржишту).

Решење: Пошто у делу а) имамо већ прочитане тражене вредности неопходно је само од вредности у децембру одузети вредност у јануару и тако добијемо колико је новца зарађено. У суштини ако бисмо добили негатвну вредност то би значило да је дошло до губитка за годину дана. Тражена зарада је једнака $5292000 - 2535000 = 2752000$, што је и очекивано јер знамо да је зарада већа од уложене вредности (109%).

в) Замислите сада следећу ситуацију. Улажемо око 2,5 милиона динара у Bitcoin-е. Нека смо током целе године знали унапред шта ће се дешавати на тржишту и ако смо имали ограничење да можемо да дижемо и улажемо новац на тржишту само четри пута укупно. Одредити моменте када је најпаметније улагати, а када дизати новац. Колика је приближна зарада, рачуната у РСД?

Решење: Сад ћемо мало боље да протумачимо график који нам је дат. На почетку је вредност Bitcoin-а приближно 2,5 милиона. Први раст се догађа средином јануара и то до негде приближно 3,9 милиона, после тога бележимо благи пад на негде око 3М почетком фебруара. У марту је тржиште било знатно уздрмано па је Bitcoin мењао доста пута вредност у односу на динар да би му врдност средином априла скочила на око 6,3 милиона, али није било толико драстичних промена као што је било после. Почетком јуна се догодио драстични пад, а након тога још пар неких мањих падова и тада (средином и крајем јула) Bitcoin пада на вредност од 3 милиона, после тога бележи раст све док не достигне још један локални максимум почетком септембра на негде 5,2 милиона; у октобру бележи пад на приближно 4 милиона. Након тога Bitcoin расте до приближно 6,95 милиона (то је и максимална вредност). Након тога ова валута губи вредност у односу на динар и пада на негде око 4,9 милиона. У последњим данима децембра валута је бележила благи раст.

Потребно је да проценимо која су то два момента када нам вредност Bitcoin-а достиже најмању вредност али тако да у односу на то у периоду између два (локална) минимума имамо неку локалну максималну вредност и након другог минимума још један локални максимум. Гледамо да су мимимуми што мањи могу да буду и максимуми што већи могу да буду. Јасно је да постоји јака веза између тражених минимума и максимума.
На основу претходне дискусије најпаметније је улагати: почетком јануара (1 Bitcoin = 2,5 милиона РСД) и средином и крајем јула (1 Bitcoin = 3 милиона РСД); док је дизање најпаметније урадити: средином априла (1 Bitcoin = 6,3 милиона РСД) и почетком новембра (1 Bitcoin = 6,95 милиона РСД).
Зараду ћемо одредити постепено. На почетку улажемо око 2,5 милиона, што је један Bitcoin. После прве продаје зарада у динарима нам расте на 2,3 милиона, након тога тих 6,3 милиона улажемо поново и купујемо Bitcoin по цени од 3 милиона динара по једном Bitcoin-у, тада ћемо имати 2,1 Bitcoin. Тих 2,1 Bitcoin продајемо на крају по цени од 6,95 по јединици, па ћемо на крају имати 14,595 милиона динара.

Оставићемо ученицима за вежбу да прецизније одраде рачун и виде колико је у области финансија битно радити са исправним подацима, поред овога треба размотрити реалнију ситуацију када имамо право на бесконачан број куповина и продаја Bitcoin-а на тржишту. Сада ћемо дати један пример без решења за вежбу.

Пример 2: Нека нам је дат график промене вредности Ether (обавља се на Ethereum мрежи, више о томе можете прочитати на линку). Потребно је одредити:
а) Промену вредности Ether валуте у 2021. години;
б) Колика је зарада по јединици Ether (рачунато у РСД) ако је уложено у Ether почетком јануара, а продато средином маја;
в) Анализирати график и на основу тога донети одлуку о улагњима ако знамо да тачно 4 пута може да се улаже и повлачи вредност са тржишта.

Можемо приметити на основу ових графика да је тржаиште дигиталних валута прилично нестабилно, па су и улагања у дигиталне валуте носи одређени ризик са собом. Поред великог ризике многе велике компаније се одлучују да улажу у дигитални новац и све више људи види будућност трговине у дигиталном новцу.

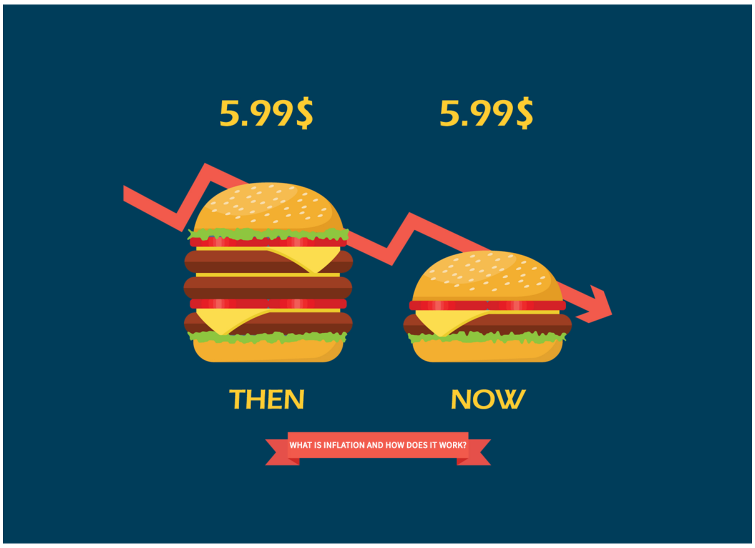
Дигитални новац је као и папирни осетљив на пуно економских фактора, као што су: прбелеми у енергетици, промене цене злата, глобалне кризе... Све ово доводи до варирања вредности новца на тржишту, па и виртуелних валута. Како знамо да ово утиче на промену вредности валуте, неопходно је да када дођемо у фазу да правимо компјутерско решење предвиђања тржишта укључимо и ове факторе.

У свету и код нас се појављује све више банкомата за крипто новац и све више људи се бави и рударењем виртуелних валута. Постоји доста држава у свету које су забраниле коришћење и рударење виртуелног новца, а има и оних које су као Република Србија то правно регулисали (Закон о дигиталној имовини можете видети на линку).

8 Инфлација

Можда једна од најчешће коришћених речи у економији је инфлација. Инфлација је чести узрочник дугих периода нестабилности у многим државама. Инфлацију је чак прогласио државним непријатељем број један у Сједињеним Америчким Државама председник Џералд Форд 1974. године. Шта је, онда, инфлација и зашто је толико важна?

Инфлација је стопа раста цена у датом временском периоду. Обично представља широку меру, као што је укупно повећање цена или повећање трошкова живота у држави. Међутим, може се и уже израчунати — за конкретне производе, као што је храна, или и за услуге, као што је на пример шишање. Без обзира на контекст, инфлација представља колико је скупљи релевантни скуп добара или услуга постао током одређеног периода, најчешће у години.



Слика 1. инфлација

8.1 Мерење инфлације

Трошкови живота потрошача зависе од цена добара и услуга и њиховог удела у кућном буџету. Како би се измерили просечни трошкови живота потрошача, владине организације спроводе анкете по домаћинствима како би одредиле корпу уобичајено купованих артикала и пратиле током времена трошкове куповине исте. Неке од највећих компоненти потрошачких корпи су трошкови становања, укључујући станарину и кредите. Цена ове корпе у датом тренутку изражена у односу на референтну годину је **индекс потрошачких цена (ИПЦ)**.

$$IPC = \frac{trenutna\ cena\ korpe}{cena\ korpe\ u\ referentnoj\ godini}$$

Процентуална промена ИПЦ-а током одређеног временског периода је најраспрострањенија мера инфлације.

На пример, ако је тренутни ИПЦ у односу на рефернтну годину 110, онда је инфлација током тог временског периода 10%.

$$inflacija\ =\ IPC\ -\ 100$$

Основна инфлација потрошача фокусира се на основне и трајније трендове инфлације, не укључујући цене које је одредила влада и променљивије цене производа, као што су цене хране и енергије, на које највише утичу сезонски фактори или привремени услови снабдевања.
Израчунавање укупне стопе инфлације – рецимо за државу, а не само за потрошаче – захтева индекс са широм покривеношћу, као што је **дефлатор БДП-а**. Корпа која служи за рачунање ИПЦ се углавном одржава константном током времена ради конзистентности, али се повремено прилагођава како би одражавала променљиве обрасце потрошње – на пример, да би укључила нову робу високе технологије и да би заменила артикле који се више не купују. Пошто дефлатора БДП-а показује како се, у просеку, цене мењају током времена за све што се производи у привреди, његов

садржај варира сваке године и актуелнији је од корпе ИПЦ-а, која је углавном фиксна. С друге стране, дефлатор укључује непотрошачке артикле (као што је војна потрошња) и стога није добра мера трошкова живота.

8.2 Добре и лоше стране инфлације

Уколико се номинални приходи домаћинстава, односно они приходи које добијају у текућем новцу, не повећавају колико и цене, тим домаћинствима је горе, јер не могу да приуште да купују једнако као раније. Другим речима, њихова куповна моћ, односно реални приход прилагођен инфлацији, опада. У стварности, цене се мењају различитим темпом. Неке, као што су цене робе којима се тргује, мењају се сваког дана; другима, као што су плате утврђене уговорима, потребно је више времена да се прилагоде. У инфлаторном окружењу, неравномерно растуће цене неизбежно смањују куповну моћ неких потрошача, а ова ерозија реалног прихода је највећи појединачни трошак инфлације. Инфлација такође може да поремети куповну моћ током времена за примаоце и обвезнике фиксних каматних стопа.

На пример, пензионери који примају фиксно повећање од 5% годишње на пензију. Ако је инфлација већа од 5%, куповна моћ пензионера опада. С друге стране, особа која отплаћује кредит са фиксном каматном стопом од 5% имао би користи од инфлације од 5%, јер би реална каматна стопа (номинална стопа - стопа инфлације) била нула.

Многе земље су се бориле са високом инфлацијом, а у неким случајевима и **хиперинфлацијом**. Зимбабве је 2008. године доживео један од најгорих случајева хиперинфлације икада, са процењеном годишњом инфлацијом у једном тренутку од 500 милијарди процената. Тако високи нивои инфлације били су катастрофални, па су државе морале да предузму тешке мере како би вратиле инфлацију на разумне нивое, понекад одустајањем од своје националне валуте, као што је то учинио Зимбабве. Са друге стране, **дефлација** или пад цена такође нису пожељни. Када цене падају, потрошачи одлажу куповину, очекујући ниже цене у будућности. За привреду то значи мању економску активност, мањи приход који остварују произвођачи и нижи привредни раст. Јапан је једна земља са дугим периодом скоро никаквог економског раста, углавном због дефлације.

Већина економиста верује да је ниска, стабилна и, што је најважније, предвидљива инфлација добра за привреду. Ако је инфлација ниска и предвидљива, лакше је обухватити је у уговорима о прилагођавању цена и каматним стопама, смањујући њене нежељене утицаје. Штавише, сазнање да ће цене бити нешто више у будућности даје подстицај потрошачима да брже купују, што подстиче економску активност. Многи централни банкари поставили су за свој примарни циљ политике одржавање ниске и стабилне инфлације, такозвано *циљање инфлације*.

8.3 Узроци инфлације

Дуготрајне епизоде високе инфлације често су резултат лабаве монетарне политике. Ако укупна количина новца превише порасте у односу на величину привреде, јединична вредност валуте се смањује; другим речима, њена куповна моћ пада, а цене расту. Овај однос између количине новца и величине привреде назива се квантитативна теорија новца и једна је од најстаријих хипотеза у економији. Чести узрочници инфлације су и поремећаји у производњи, као што су природне катастрофе, или у производним трошковима, као што су високе цене нафте које могу да смање укупну понуду.

8.4 Примери

Пример 1: Очекује се да ће у текућој години очекивана стопа инфлације износити 10%. Одредити нормалну годишњу каматну стопу на улоге у банци да би реална годишња стопа била 5%.
Решење: Уведимо следеће ознаке: p - номинална годишња каматна стопа, p_1 - реална годишња стопа, i - стопа инфлације. Користићемо **Фишерову формулу**:

$$p = (1 + p_1)(1 + i) - 1$$

Односно у нашем задатку ће нормална годишња каматна стопа бити:

$$p = (1 + 0,05)(1 + 0,1) - 1 = 15,5\% \ .$$

Ако се главница G_0 **повећа или смањи** за p%, онда је њен нови износ:

$$G = G_0(1 \pm p)$$

Пример 2: Колика је цена неког производа од 100 динара ако се она:

а) повећа за 18%

б) смањи за 18%

Решење: Ако се цена производа повећа за 18%, биће:

$G = G_0(1 + p) = 100(1 + 0,18) = 100 \cdot 1,18 = 118$

Ако се цена производа смањи за 18%, биће:

$G = G_0(1 - p) = 100(1 - 0,18) = 100 \cdot 0,82 = 82$.

Уколико је главница G у току неког периода n **више пута повећана или смањена**, редом за стопе $p_1, p_2, ..., p_n$, онда ће износ те главнице на крају периода n порасти на:

$$G_n = G(1 + p_1)(1 + p_2)...(1 + p_n)$$

односно опасти на:

$$G_n = G(1 - p_1)(1 - p_2)...(1 - p_n)$$

Уколико је $p_1 = p_2 = ... = p_n$, крајња вредност главнице је:

$$G_n = G(1 + p_1)^n$$

односно:

$$G_n = G(1 - p_1)^n$$

Пример 3: Ако је у току једног периода цена неког производа од 65 динара повећана заредом 4 пута, уз стопе 10%, 20%, 40% и 50%, колика ће бити крајња цена тог производа након свих повећања?

Решење: Крајња цена тог производа ће након свих повећања бити:
$G_n = G(1 + 0,1)(1 + 0,2)(1 + 0,4)(1 + 0,5) = 180,18$.

Ако је главница G **више пута** у току **једног** периода повећана или смањена заредом за процентне стопе $p_1, p_2, ..., p_n$, онда је **стопа p њеног укупног раста**:

$$p = (1 + p_1)(1 + p_2)...(1 + p_n) - 1$$

а **стопа p њеног укупног пада**:

$$p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)...(1 - p_n)$$

Уколико су **стопе једнаке**, односно $p_1 = p_2 = ... = p_n$, **стопа укупног раста главнице** је:

$$p = (1 + p_1)^n - 1$$

односно:

$$p = 1 - (1 - p_1)^n$$

Пример 4: Ако је у неком временском периоду вредност новчане јединице имала редом три девалвације, за стопе 12%, 15% и 13%, колики је проценат укупног обезвређења?
Решење: Проценат укупног обезвређења је:
$p = 1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 1-(1-0,12)(1-0,15)(1-0,13)-1 = 0,34924 \cdot 100 = 34,924\%$
Вредност новчане јединице после девалвације ће бити:
$G_n = 1(1 - 0,12)(1 - 0,15)(1 - 0,13) = 0,65076$.

Пример 5: Ако је у току године цена неког производа од 23 динара четири пута повећана за исту стопу од 20%, колика ће бити крајња цена те услуге, а колики је укупни годишњи проценат повећања те цене?
Решење: Крајња цена ће бити: $G_n = 23(1 + 0,20)^4 = 47,6928$
Укупни годишњи проценат повећања те цене ће бити:
$p = (1 + 0,20)^4 - 1 = 1,0736 \cdot 100 = 107,36\%$.

Пример 6: Колика је стопа инфлације за једну годину, ако је месечни раст цена у тој години износио $7,2\%$?

Решење: Стопа инфлације ће бити:

$p = (1 + p_1)^n - 1 = (1 + 0,072)^12 - 1 = 1,30323 \cdot 100 = 130,323\%$.

Уколико се главница повећа или смањи за стопе приноса $p_1, p_2, ..., p_n$, где се сви приноси израчунавају на исту главницу G, крајњи износ главнице у случају повећања износи:

$$G_n = G[1 + (p_1 + p_2 + ... + p_n)]$$

а за случај смањења:

$$G_n = G[1 - (p_1 + p_2 + ... + p_n)]$$

где је за случај смањења $p_1 + p_2 + ... + p_n < 1$.

Пример 7: Бруто зарада радника износи 16540 динара. Колика ће бити његова нето зарада, ако је бруто зарада оптерећена доприносима чије су стопе 16%, 3%, $2,8\%$ и $11,5\%$?

Решење: Нето зарада радника ће бити:

$G_n = G[1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)] = 16540[1 - (0,16 + 0,03 + 0.028 + 0,115)] = 11032,18$.

9 Квиз: финансијска писменост

1. За 500 долара смо купили капитал вредан 1000 долара. Његова вредност се спусти за 50%. Након тога продајемо капитал. Колико долара смо зарадили овом инвестицијом?
а) 500 долара
б) 250 долара
в) 0 долара

2. Претпоставимо да смо ставили 1000 долара на каматни рачун који добија 5% интереса годишње. Колико година ће бити потребно да наша инвестиција буде вредна 5000 долара?
а) Између 0 и 5 година
б) Између 5 и 15 година
в) Између 15 и 45 година
г) Преко 45 година

3. Лена и Сара су близнакиње. Од двадесете године године, Сара је сваког месеца уплаћивала 20 долара на штедни рачун. Након 20 година, Сара је престала да додаје новац на штедни рачун, али је оставила новац на рачуну. Лена није ништа стављала на рачун до четрдесете године. Онда је она стављала 20 долара месечно на рачун до

своје шездесете године. Претпоставимо да су и Лена и Сара имале 6% годишње камате на свом штедном рачуну. Када су се обе пензионисале у својој шездесетој години, која је имала више новца на рачуну?

а) Лена

б) Сара

в) Имале су исту количину

4. Орочили сте 100 евра са годишњом каматом од 10%. Колико новца ћете имати на штедном рачуну после 5 година, ако нема подизања новца?

а) Тачно 150 евра

б) Више од 150 евра

г) Мање од 150 евра

5. Током наредних 10 година цена добара које купујете ће да се дуплира, али ће се дуплирати и зарада коју стекнете. Да ли можете да купите мање, исто или више добара?

а) Мање

б) Више

в) Исто

6. Орочили сте средства у банци на две године, са годишњом каматом од 15%. Како ће изгледати стање на Вашем рачуну.

а) Банка ће да дода прве године више новца него друге године

б) Банка ће да дода друге године више него прве године

в) Обе уплате ће бити исте

7. Када за неког кажемо да је солвентан, то значи да је он: а) Добар у бизнису

б) Паметан

в) Способан да измири обавезе према дуговима

8. Ко је Satoshi Nakamoto?

а) фудбалер фудбалске репрезентације Јапана

б) Најпознатији банкар на свету

в) Псеудоним за особу која је развила Bitcoin

9. Шта је такозвани Šilk Road"?

а) Део кода који се користи за Blockchain технологију

б) Онлајн продавница где се могу купити нелегални производи уз помоћ Bitcoina

в) Врста криптовалуте

10. Која је била цена Bitcoina када се тек појавио (у јануару 2021. године вреди 4,415,488.36 динара)?

а) 1 долар

б) 0.001 долар

в) 0.01 долар

11. Шта је Blockchain?

а) Кутија за чување новца

б) Метод у ком се продаје Bitcoin

в) Децентрализована база података која садржи информације о дигиталним трансакцијама било које врсте

12. Miners-и добијају новчану награду за mine-овање:

а) Хеша

б) Bitcoina

в) Блокова

Одговори:

1. в
2. б
3. б
4. б
5. в
6. б
7. в
8. в
9. б
10. а
11. в
12. б